

Politecnico di Milano – Facoltà di Ingegneria industriale
Corso di laurea in Ingegneria meccanica
Anno accademico 2008-09

Insegnamento di Costruzione di Macchine I
(Prof. M. Giglio, M. Gobbi, S. Miccoli, M. Sangirardi)

Esercizio n° 7

Esercitazione n° 3 – Analisi cinematica

Effettuare l'analisi cinematica della struttura in Figura 1 e successivamente determinare le reazioni vincolari.

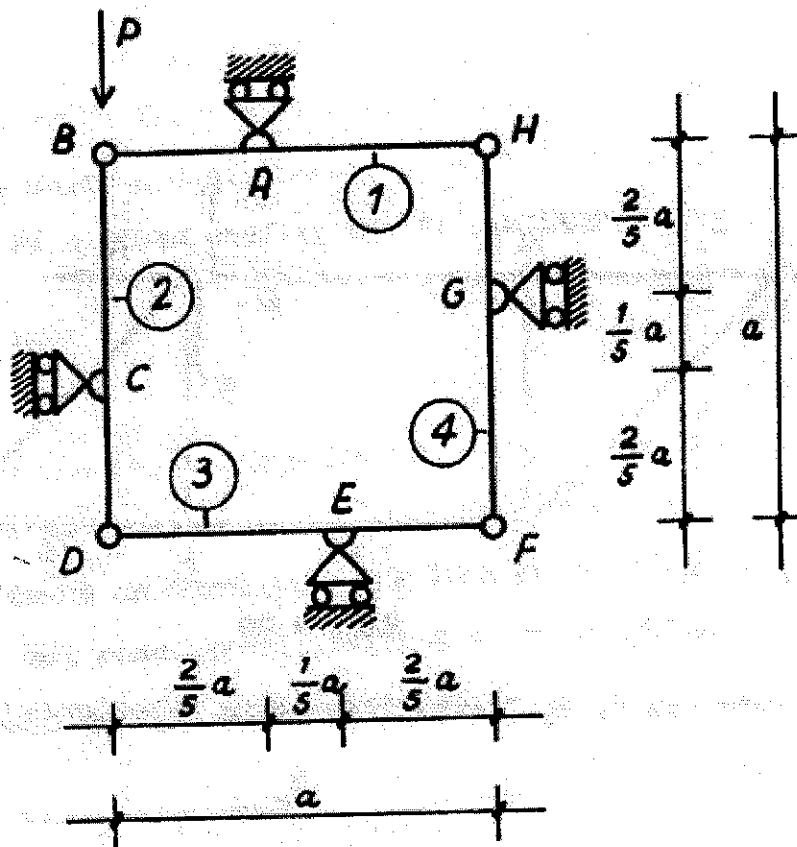


Figura 1

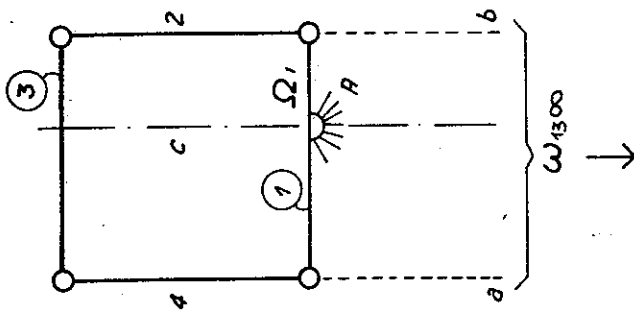


figura 33

to a terra tramite l'asta 1 esso deve stare sulla retta e congiungente la cerniera F con Ω_1 ; per il collegamento a terra tramite l'asta 3 esso deve stare sulla retta g congiungente la cerniera E con Ω_3 . Si riconosce che le condizioni sono tra loro incompatibili, quindi non sono possibili moti rigidi infinitesimali per l'asta 4, si riconosce anche che non sono possibili moti rigidi per le altre aste che compongono la travatura.

In alternativa al procedimento qui sopra proposto si possono

ste 1, 2 e 4 e la cerniera A. O'altre parte (figura 34) il centro di istantanea rotazione dell'asta 3 deve stare anche sulla retta d a cause della presenza del carrello B; il centro di istantanea rotazione della 3 si trova nell'intersezione delle rette c e d che è il punto all'infinito in direzione verticale.

In figura 35 si considera l'infuenza del carrello C: l'asta 4 è vincolata al sistema di riferimento direttamente dal carrello C ed indirettamente dalle aste 1 e 3. Per effetto del carrello C il centro di istantanea rotazione dell'asta 4 deve stare sulla retta f; per il collegamen-

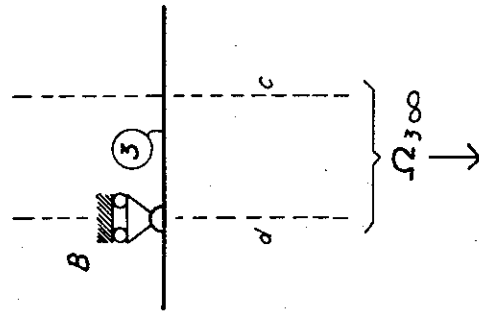


figura 34

studiare preliminarmente gli effetti della cerniera A e del carrello C, in fase successiva si può tener conto del carrello B.

Esempio 10

La travatura illustrata in figura 36 presenta qualche difficoltà di studio, perché non è individuabile direttamente il centro di istantanea rotazione di nessuna delle travi componenti.

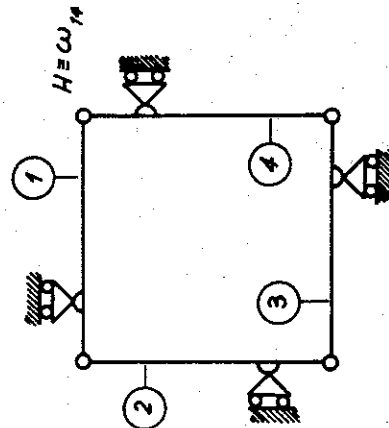


figura 36

Qui nel seguito si propone un procedimento di analisi che permette di superare la difficoltà.

Il centro di rotazione relativa delle aste 1 e 4, se esiste, non può che essere la cerniera H; bisogna dunque determinare, con riferimento alla figura 37, la retta r (luogo dei centri di rotazione relativa delle aste 1 e 4 finito dagli altri

figura 35

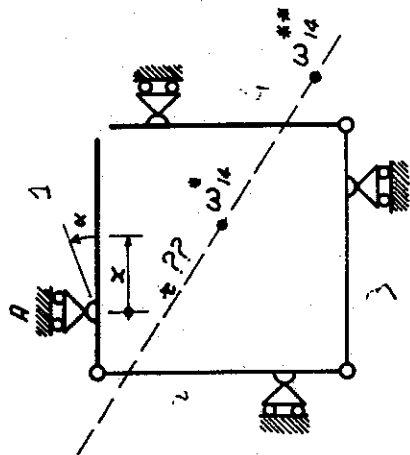


figura 37

vincoli presenti nella struttura) e controllare se esse passa per la cerniera H: si può così decidere circa la possibilità di rotazioni relative tra le aste 1 e 4.

Poiché il sistema rappresentato in figura 37 ha due gradi di libertà si possono assumere come coordinate libere per descriverne i moti rigidi infinitesimali l'angolo di rotazione dell'asta 1 intorno alla cerniera del carrello A e lo scorrimento x dell'asta stessa lungo la guida del carrello A.

Apparterrà alla retta r il centro di rotazione relativa ω_{14}^* delle aste 1 e 4 corrispondente ad arbitrarie rotazioni (rigide) α dell'asta 1 mentre è nulla la sua traslazione x; analogamente apparterrà alla retta r il centro di rotazione relativa ω_{14}^{**} corrispondente ad arbitrarie traslazioni x dell'asta 1 mentre è nulla la sua rotazione α .

Dal punto di vista operativo, lasciare libera la rotazione α dell'asta 1 ed imporre che sia nulla la sua traslazione x, significa trasformare il carrello A in una cerniera A* e fare riferimento al sistema di figura 38, che ha un solo grado di libertà: in queste condizioni è relativamente semplice determinare ω_{14}^* .

Similmente, bloccare la rotazione α dell'asta 1 e lasciare libero il suo scorrimento x significa trasformare il carrello A in una guida prismatica A** (figura 39) e determinare ω_{14}^{**} con riferimento a questo secondo sistema ad un grado di libertà.

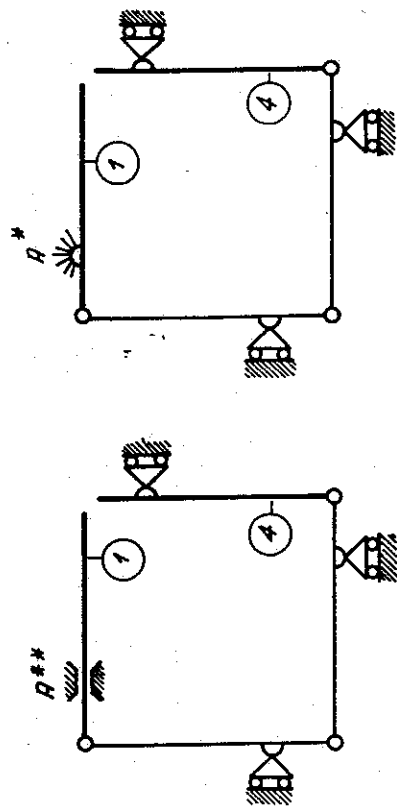


figura 38

figura 39

Nelle figure 40 e 41 sono riportati gli sviluppi per la determinazione di ω_{14}^* . Si tratta di una catena di aste e non si presentano particolari difficoltà.

La cerniera A* è il centro di rotazione istantanea Ω_1 dell'asta 1; il centro di istantanea rotazione Ω_2 dell'asta 2 è l'intersezione

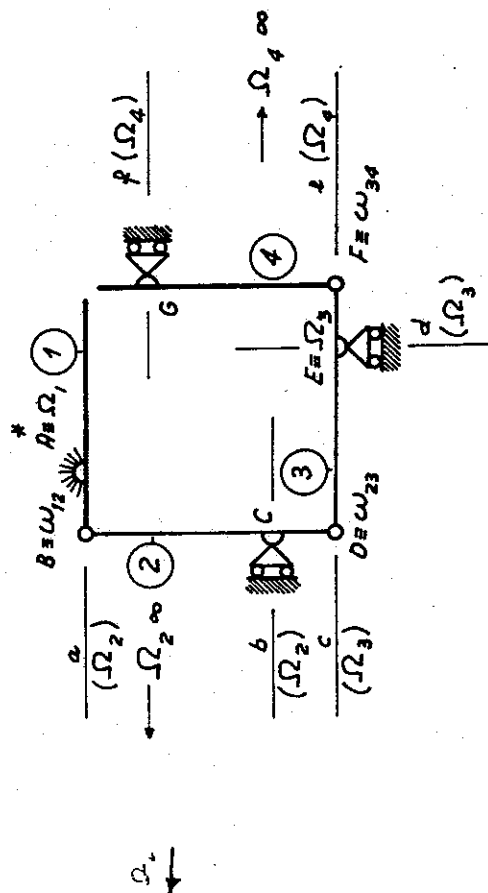


figura 40

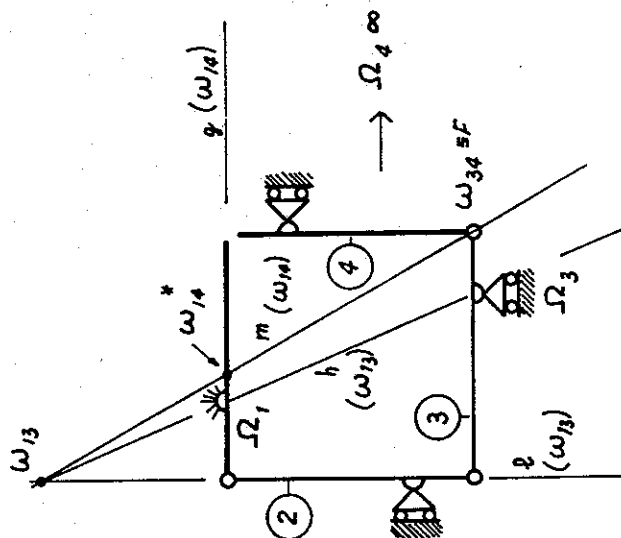


figura 41

delle rette a (congiungente della cerniera A^* - centro di rotazione Ω_1 dell'asta 1 - con la cerniera B-centro di rotazione relativa ω_{12} delle aste 1 e 2) e b (normale al piano di scorrimento del carrello C, passante per la cerniera del carrello stesso): esso è all'infinito in direzione orizzontale, il centro di istantanea rotazione Ω_3 dell'asta 3 è intersezione delle rette c (congiungente Ω_2 con la cerniera D, centro di rotazione relativa ω_{23} delle aste 2 e 3) e d (normale al piano di scorrimento del carrello E passante per la cerniera del carrello stesso): Ω_3 coincide con la cerniera del carrello E. In modo analogo si ottiene che il centro di istantanea rotazione Ω_4 è situato all'infinito in direzione orizzontale.

Una volta definiti, procedendo lungo la catena cinematica, i centri di rotazione delle varie aste è possibile determinare i centri di rotazione relativa di aste che non siano direttamente collegate l'una all'altra nella catena (figura 41).

Si osserva che il centro di rotazione relativo ω_{14}^* appartiene alla retta g che congiunge Ω_1 con Ω_4 (infatti è possibile pensare il sistema di riferimento come un'asta rigida che collega tali punti). Si considerano poi gli effetti delle presenza delle aste 2 e 3: si riconosce che il centro di rotazione relativa ω_{13} dell'asta 3 rispetto all'asta 1, per la presenza del collegamento creato dall'asta 2, appartiene alla retta l (indicata in figura 41), ω_{13} appartiene anche alle rette h congiungente Ω_1 con Ω_3 .

Ai fini cinematici si può allora affermare che l'asta 4 ruota rispetto all'asta 3 intorno alla cerniera F, mentre l'asta 3 ruota rispetto all'asta 1 intorno alla cerniera ideale ω_{13} , quindi il centro di rotazione relativa ω_{14} dell'asta 4 rispetto all'asta 1 appartiene alla retta m congiungente F con ω_{13} . L'intersezione delle rette m e g definisce il centro di rotazione ω_{14}^* cercato.

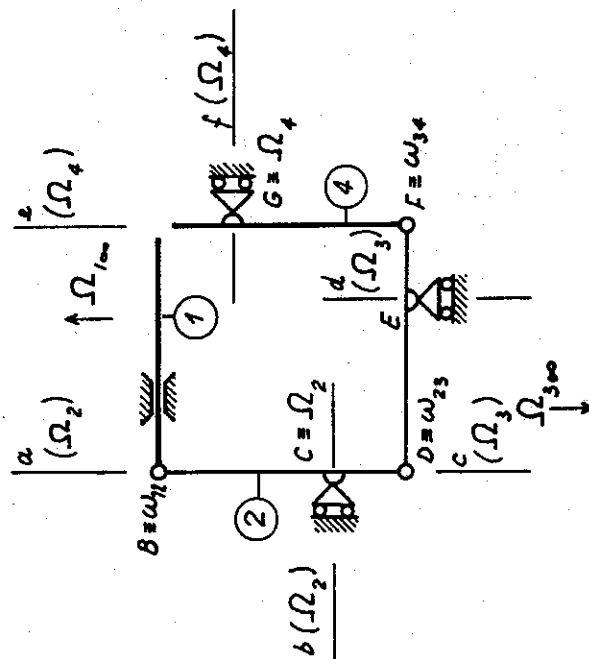


figura 42

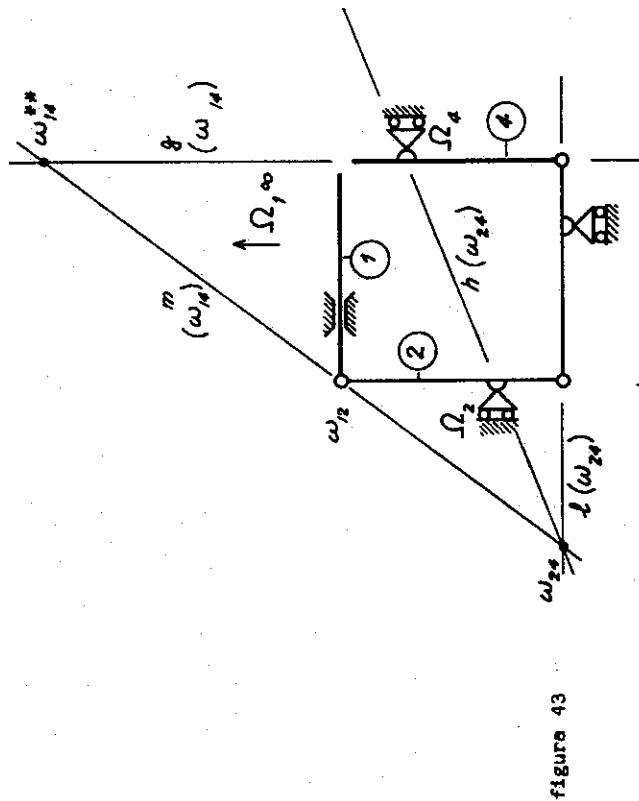


figura 43

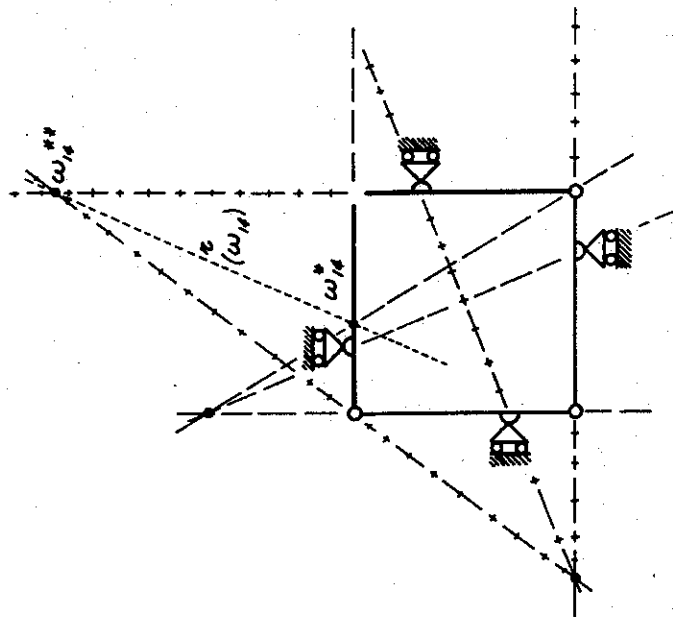


figura 44

Con procedimenti analoghi a quelli sopra esposti in dettaglio si può procedere (figure 42 e 43) alla determinazione di ω_{14}^{**} . Le conclusioni sono riassunte sulla figura 44: le costruzioni grafiche che portano alla determinazione di ω_{14}^{**} sono riportate con rette tratteggiate, le costruzioni grafiche di ω_{14}^{**} sono riportate con rette a crocette.

Si determina allora la retta r (punteggiata in figura 44) luogo dei centri di rotazione relativa delle aste 1 e 4: poiché tale retta non passa per la cerniera H si può concludere che non sono possibili rotazioni relative infinitesimali tra le aste 1 e 4. E' poi immediato concludere circa l'impossibilità di moti rigidi infinitesimali delle varie aste che compongono la travatura.

Si lascia al lettore lo sviluppo delle varianti che si possono proporre al metodo qui illustrato e la determinazione delle condizioni di labilità.

Esercizio 1

Riconoscere che la struttura non è labile (figura 45).

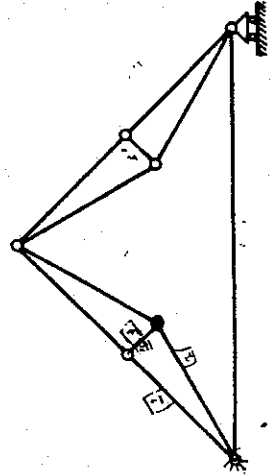


figura 45

Esercizio 2

Riconoscere che la travatura rappresentata in figura 46 è labile.

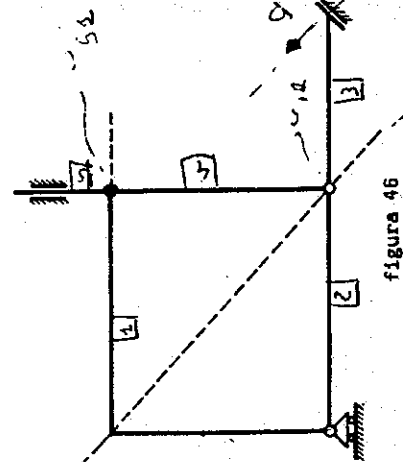
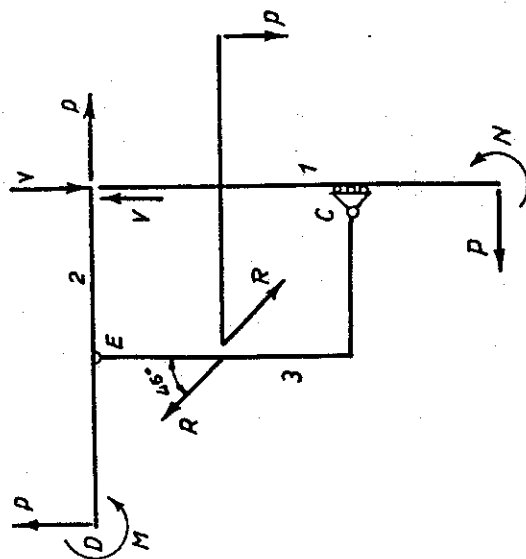


figura 46

**figura 30**

Se interessassero anche i valori di A e V sarebbe necessario scrivere l'equazione di equilibrio dell'asta 2 intorno alla cerniera E:

$$Pa - M + Va = 0$$

sostituendovi il valore di M si ottiene:

W. E. B. DUBOIS

L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale dell'asta 1 (movi-

 α

$$V - P - R\sqrt{2}/2 = 0$$

da cui:

$$R = 2V_2P$$

intorno al perro del
carrello C:

$$Pa + Pa - N = 0,$$

da cui:

N ■ 2Pa

Nota N, l'equazione di equilibrio all'intera tazione dell'intera struttura intorno ad

un polo, ad esempio
il punto D, permette
di ricavare M:

$$3a.P + 3a.P - N - M = 0,$$

da cui:

M = 4Pa

Se interessassero anche i valori di A e V sarebbe necessario scrivere

l'equazione di equilibrio dell'asta 2 intorno alla cerniera E:

sostituendovi il valore di M si ottiene:

V. 3p.

L'equazione di equilibrio alla traslazione verticale dell'asta 1 (movi-

 α

$$V - P - R\sqrt{2}/2 = 0$$

da cui:

$$R = 2V_2P$$

Esempio 11

L'analisi cinematografica della travestitura rappresentata in figura 31 è stata sviluppata nel capitolo 1 all'esempio 10 poiché la travestitura non è labile, ha senso procedere al calcolo delle reazioni.

In figura 32 sono messe in evidenza le componenti di reazione incognite: ovviamente le reazioni orizzontali dei carrelli C e G devono essere eguali ed opposte per l'equilibrio.

Poiché l'anello chiuso è deformabile conviene aprirlo in corrispondenza di una delle cerniere: in figura 32 sono messe in evidenza le componenti V e T della forza che l'asta 1 scambia con la cerniera B

- la cerniera B con la for-
 za P ad essa applicata so-
 no pensate collegate all'a-
 sta 2 ~ in alternativa si
 potrebbero mettere in evi-
 denza le componenti della
 forza che l'asta 2 scambia
 con la cerniera B e pensa-
 re quest'ultima, con la for-
 za P applicata, collegata
 all'asta 1 - si potrebbe
 anche, seguendo la tecnica
 delle travature reticolari

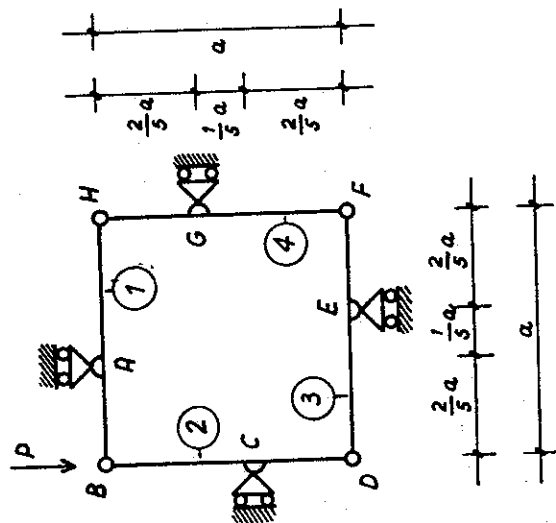


figura 31

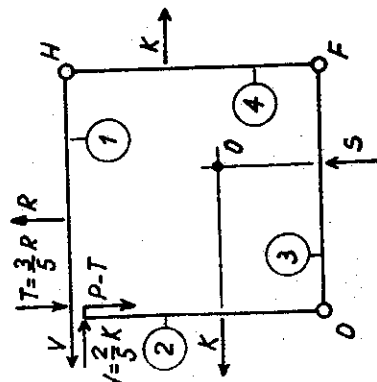


figura 32

caricate anche al di fuori dei nodi, estrarre la cerniera B ed imporre l'equilibrio sotto l'azione del carico P e delle forze scambiate con le aste 1 e 2).

Per l'equilibrio dell'asta 1 alla rotazione intorno alla cerniera H si ottiene:

$$T = \frac{3}{5} R,$$

analogamente, per l'equilibrio della trave 2 alla rotazione intorno alla cerniera D, si ottiene:

$$V = \frac{2}{5} K,$$

la condizione di equilibrio alla rotazione del complesso formato dalle travi 1 e 4 intorno alla cerniera F comporta che sia:

$$V a + T a - R \frac{3}{5} a - K \frac{3}{5} a = 0,$$

sostituendo le espressioni T e V appena ottenute, si ha:

$$K = 0.$$

L'equazione di equilibrio globale alla rotazione intorno al polo O comporta che sia:

$$R = 3P,$$

infine, per l'equilibrio alla traslazione in direzione verticale:

$$S = -2P.$$

Considerazioni analoghe si applicano se l'anello chiuso viene aperto in corrispondenza di altra cerniera, ad esempio H (fig. 33).

Le condizioni di equilibrio alla rotazione delle aste 1 e 4 intorno alle cerniere B ed F rispettivamente comportano:

$$X = \frac{2}{5} R, \quad Y = \frac{3}{5} K.$$

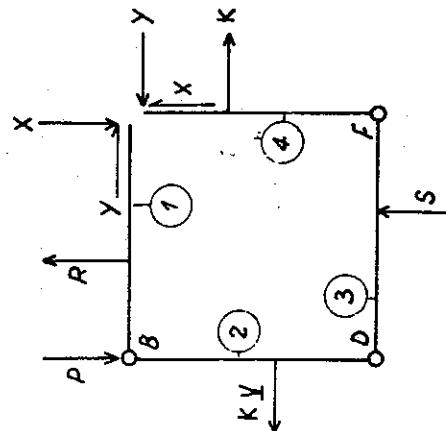


figura 33

la condizione di equilibrio del complesso delle travi 1 e 2 alla rotazione intorno alla cerniera D è la seguente:

$$X a + Y a - R \frac{2}{5} a - K \frac{2}{5} a = 0, \quad (*)$$

sostituendo le espressioni di X ed Y si ha:

$$K = 0.$$

Il lettore può controllare che i calcoli risultano meno immediati se si scrive la condizione di equilibrio del complesso delle travi 3 e 4 alla rotazione intorno alla cerniera D, per altro equivalente alla (*).

Esempio 12

Si consideri l'arco a tre cerniere rappresentato in figura 34, presenta un certo interesse lo studio del problema del calcolo delle reazioni in relazione al fenomeno della labilità che si verifica quando le tre cerniere sono allineate, ossia al tendere della freccia h a zero.

In figura 35 sono messe in evidenza le componenti di reazione, l'equazione di equilibrio globale alla rotazione della travatura intorno alla cerniera A si scrive:

$$V_2 \ell - P_1 \ell/3 - P_2 2\ell/3 - P_3 3\ell/2 - Q_3 \beta \ell/2 = 0,$$

l'equazione di equilibrio dell'asta 2 intorno alla cerniera B è la seguente

$$V \ell - S \beta \ell - P_3 \ell/2 + Q_3 \beta \ell/2 = 0.$$

Il sistema delle equazioni che forniscono le reazioni vincolari si completa con le equazioni di equilibrio globale in direzione verticale ed in direzione orizzontale. Una volta separate le incognite dei termini noti si ha:

$$2V = P_1/3 + 2P_2/3 + 3P_3/2 + \beta Q_3/2 \quad (1)$$

$$V - \beta S = P_3/2 - \beta Q_3/2 \quad (2)$$

$$V + T = P_1 + P_2 + P_3$$

$$-R + S = Q_3.$$

Analizzando il sistema sopra riportato si riconosce che, quando $\beta \neq 0$, la soluzione si ottiene facilmente con il metodo di sostituzione operando a partire dalla prima equazione.